الجبر البولينى (المنطقى)
BOOLEAN ALGEBRA
واستخدامه فى تصميم وتبسيط الدارات المنطقية

إعداد
مهندس / محمد الحريرى
Mgh_arab@hotmail.com

قبل قراءة هذا الموضوع أنصح بقراءة موضوع سابق بعنوان "المنطق السلمى LADDER LOGIC ودارات التحكم المنطقى القابلة للبرمجة PLC"

مقدمة :

إن القواعد الرياضية للعمليات الحسابية تختلف تبعا للكميات الرقمية المتعامل معها . ففى نطاق الأعداد الصحيحة يمكن القول أن العملية (4 + 3) تنتج العدد الصحيح (7) ولذلك فإنه عند توصيل مصدرين مستمرين DC للجهد على التوالى أحدهما جهده 3 فولت والأخر جهده 4 فولت فإن الجهد الكلى بالتأكيد يساوى 7 فولت .
ولكن عند العمل مع التيار المتناوب (المتردد) AC فإن قواعدنا الرياضية ستتغير لأننا نتعامل مع أعدادا مركبة (لها قيمة magnitude وزاوية angle أو جزء حقيقى real وآخر تخيلى imaginary) وسيصبح من العقلانى القول بأن 4 + 3 = 5 وذلك باعتبار 4 هى الجزء التخيلى من العدد المركب.
ولنطاق الأعداد المنطقية أيضا قواعده التى حددها الفليسوف أرسطو Aristotle حيث وجد أن النظام المنطقى لا يحتوى إلا على قيمتين هما (الصواب True أو الخطأ False) وهذا التحديد لوجدود إحتمالين (فقط) لحالات النظام المنطقى أنتج أربعة من القواعد الأساسية :

١- قاعدة التطابق Identity حيث A هو A
٢- قاعدة المخالفة Non-contradiction حيث A ليست هى non-A
٣- قاعدة إستثناء المنتصف Excluded Middle حيث يكون الإحتمال A أو non-A (أى ليس هناك ما بين هذين العددين)
٤- قاعدة الإستنتاج المنطقى Rational Inference
(حيث A هى أحد الإحتمالين و non-A هو الإحتمال الأخر)

وبالطبع فإن هذه القواعد الأربع لا يمكن تطبيقها إلا فى منطق الإحتمالين حيث لا احتمال ثالث . أما لو تعددت الإحتمالات فإنه يمكن تطبيق قواعد أخرى لنظام يعرف بالمنطق الغير واضح *fuzzy* حيث سيتواجد العديد من درجات الصواب True والخطأ False ولكن فيه لن يكون بالإمكان تطبيق قاعدة مثل قاعدة (إستثناء المنتصف) وستكون هناك خروقات للقاعدة الأرسطية الثانية (قاعدة المخالفة).

عام 1854 قام العالم الرياضى البريطانى جورج بول George Boole (1815-1864) بتقديم بحث بعنوان "تحقيق لقواعد التفكير كما وجدت فى النظريات الرياضية للمنطق والإحتمالات"

"An *Investigation of the Laws of Thought, on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities"*

وقد جمع فيه العديد من قواعد العلاقة بين الكميات التى لها أحتمالين فقط (صواب وخطأ – أو– 1 و 0) . وقد سمي هذا النظام الرياضى فيما بعد بالجبر البولينى (أو الجبر المنطقى) Boolean algebra

وكل العمليات التى تجرى على الكميات المنطقية لها خرج ذو أحتمالين فقط (إما 0 أو 1) .

وفى عام 1938 تعرف العالم Claude Shannon من خلال رسالته "التحليل الرمزى لدارات الريلى والمفاتيح"

"A *Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits"*

على كيفية تطبيق الجبر البولينى على الدارات المفتاحية (ذات الحالتين on و off) واضعا العمل النظرى لجون بول فى خدمة التطبيق العملى بتحليل وتصميم الدارات الرقمية Digital Circuits

الحساب البولينى Boolean arithmetic :

ولنبدأ أكتشاف الجبر البولينى **بجمع** الأعداد :

0 + 0 = 0

0 + 1 = 1

1 + 0 = 1

1 + 1 = 1

وكما نلاحظ فإن العمليات الثلاثة الأولى تعتبر عقلانية من وجهة نظر الجبر العادى أما العملية الرابعة فقد تثير الإستغراب فى أول الأمر ولكن بمجرد معرفة أننا نتحدث فى النطاق المنطقى حيث لا يوجد إلا إحتمالين لخرج أى عملية (0 او 1) وحيث أن ناتج العملية 1+1 لا يساوى 0 إذن فهو 1 (ولا يوجد هنا ما يسمى بالرقم 2) .

ولا يهمنا فى الجبر البولينى عدد الحدود المجموعة فمثلا :

0 + 1 + 1 = 1

1 + 1 + 1 = 1

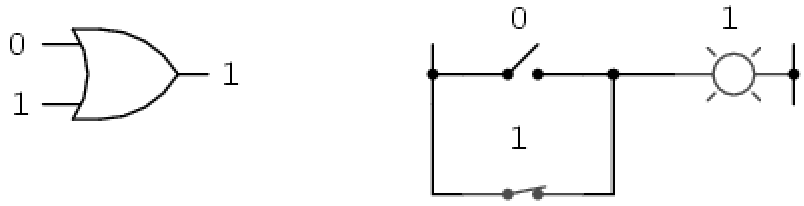
0 + 1 + 1 + 1 = 1

0 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1

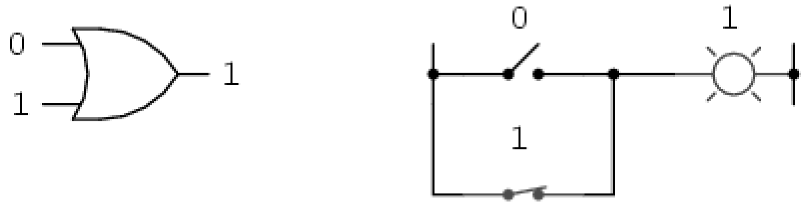
1 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1

وبالعودة والنظر بتركيز إلى العمليات التى جمعنا فيها حدين نجدها تمثل الدالة **OR** :

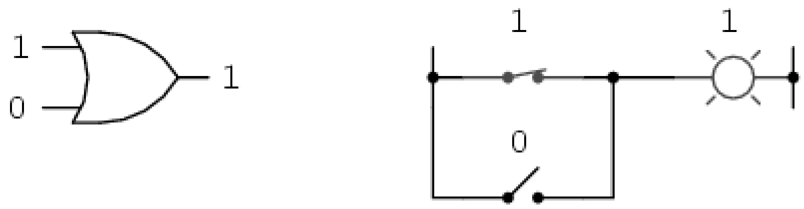
0 + 1 = 1



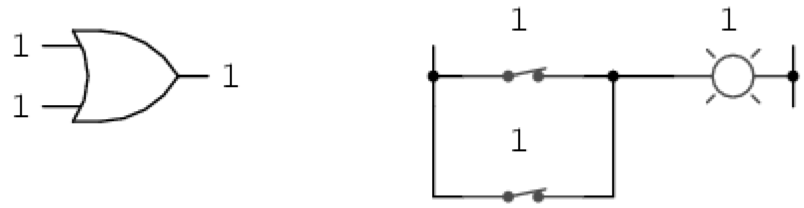
0 + 1 = 1



$$1 + 0 = 1$$



$$1 + 1 = 1$$



ولا يوجد ما يسمى بعملية **الطرح** فى الجبر البولينى . فالطرح يعنى وجود عدد سالب : فـ **[3 – 5]** تعنى [**(-3) + 5**] وفى الجبر البولينى لا يوجد أعداد سالبة . وبالتالى لا يوجد فى الجبر البولينى عملية تسمى **القسمة** (لأن القسمة ما هى إلا تكرار لعملية الطرح).

ولكن عملية **الضرب** فمسموح بها فى الجبر البولينى . وهى تشبه تماما مثيلتها فى الجبر العادى :

$\mathbf{0 \times 0 = 0}$

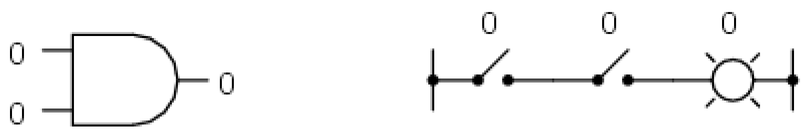
$\mathbf{1 \times 0 = 0}$

$\mathbf{0 \times 1 = 0}$

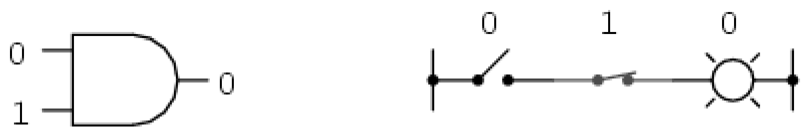
$\mathbf{1 \times 1 = 1}$

والعمليات الأربع السابقة تعتبر تمثيلا للدالة AND :

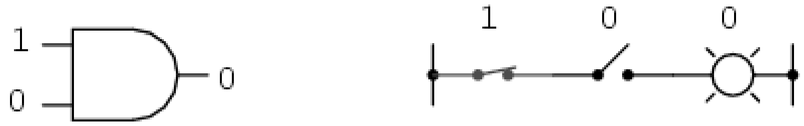
$$0 \times 0 = 0$$



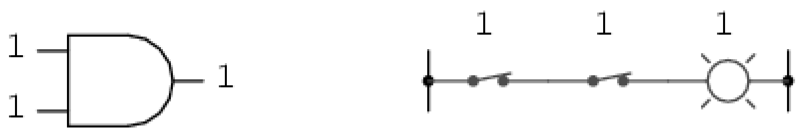
$$0 \times 1 = 0$$



$$1 \times 0 = 0$$



$$1 \times 1 = 1$$

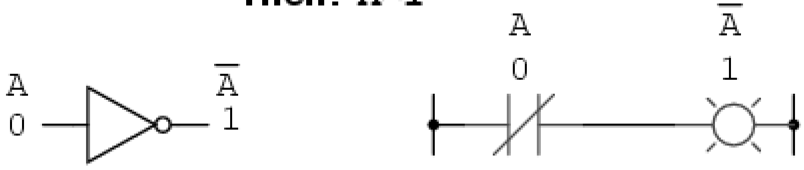


وكمـا فـى الجبـر العـادى فـإن الجبـر البـولينى يمكنـه إستخدام الحـروف للتعبيـر عـن المتغيـرات (وغالبـا تسـتخدم الأحـرف الكبيـرة **CAPITAL** لهـذا الأمـر) حيـث يمكـن لأى متغيـر أن يكـون أحـد الإحتمـالين 1 او 0 . ولكـل متغيـر لـه مـا يعـرف بـالمتمم complement (أى معكوس قيمته) . فعلى سبيل المثال لو كان A=0 فإن المتمم سيعبر عنه بوضع خطا فوق الحرف ليكون $\overline{A}$ ويكتب أحيانا ('A) .

ويمكن ببساطة تخيل أن دارة NOT تقوم فى عملها على فكرة المتمم :

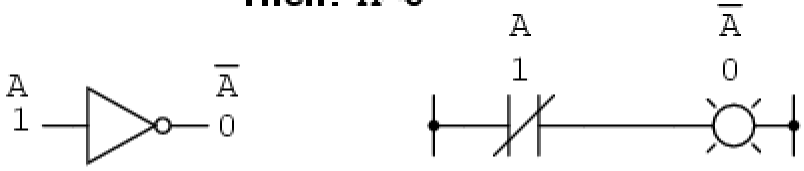
If: $A=0$

Then: $\overline{A}=1$



If: $A=1$

Then: $\overline{A}=0$



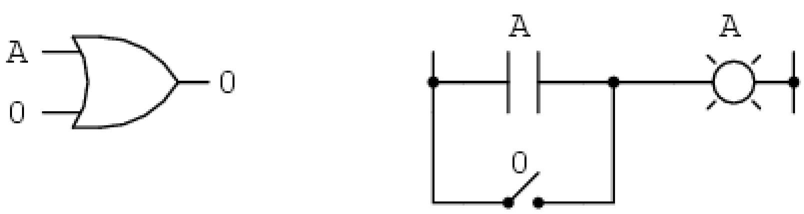
متطابقات الجبر البولينى Boolean algebraic identities :

فى علم الرياضيات ، المتطابقة هى التعبير الرياضى الذى يصح لجميع القيم المحتملة للمتغير (أو المتغيرات) الموجود بها.

والمتطابقات فى الجبر البولينى مثل : (لاحظ تطبيقها على البوابات المنطقية)

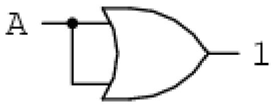
-١

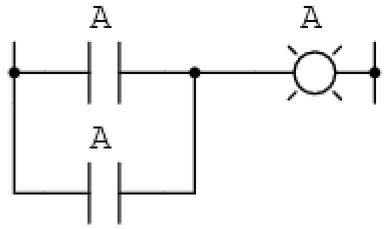
$$A + 0 = A$$



٢-

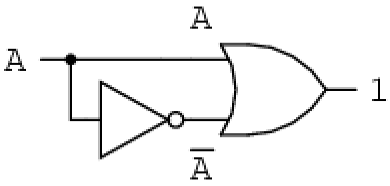
$A + A = A$

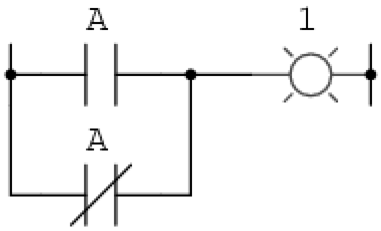




٣-

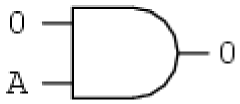
$A + \overline{A} = 1$

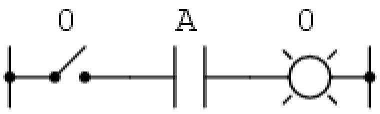




٤-

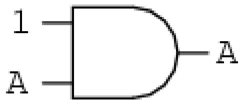
$0A = 0$

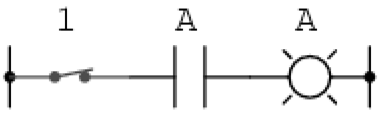




٥-

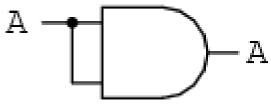
$1A = A$

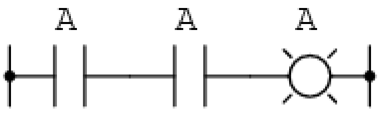




٦-

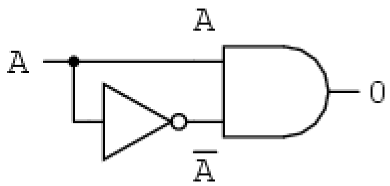
$AA = A$

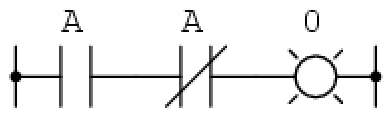




٧-

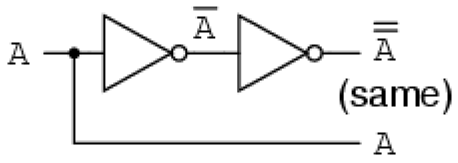
$$A\overline{A} = 0$$

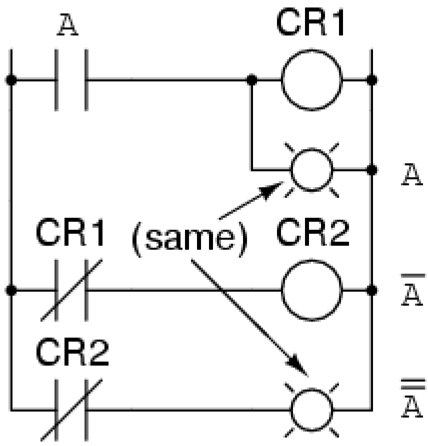




٨-

$$\overline{\overline{A}} = A$$





أخذ المتمم مرتين لأى عدد يعطى نفس العدد .

الخواص فى الجبر البولينى Boolean algebraic properties :

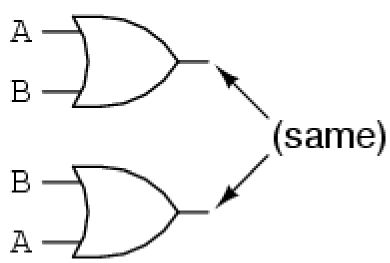
والخاصية هى نوع أخر من المتطابقات يتم بها معرفة العلاقات بين المتغيرات المختلفة . والخواص فى الجبر البولينى مثل :

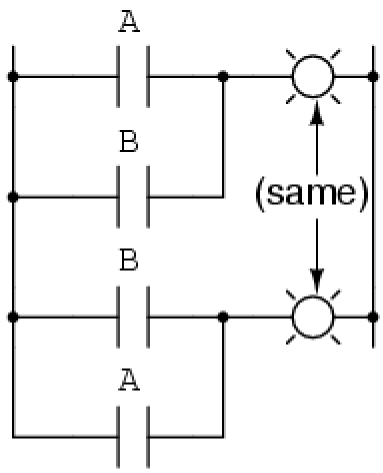
١- **خاصية التبديل commutative property :** وتعنى أن المتغيرات يمكن تبديل أماكنها.

ففى عملية الجمع يمكن تبديل المتغيرات :

Commutative property of addition

$$A + B = B + A$$

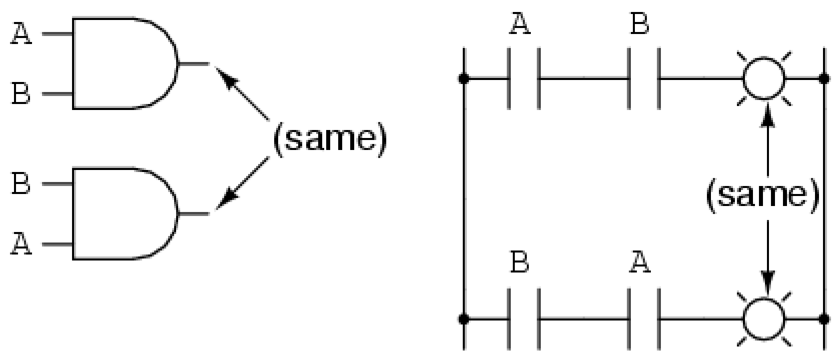




وفى عملية الضرب يمكن تبديل المتغيرات :

Commutative property of multiplication

AB = BA



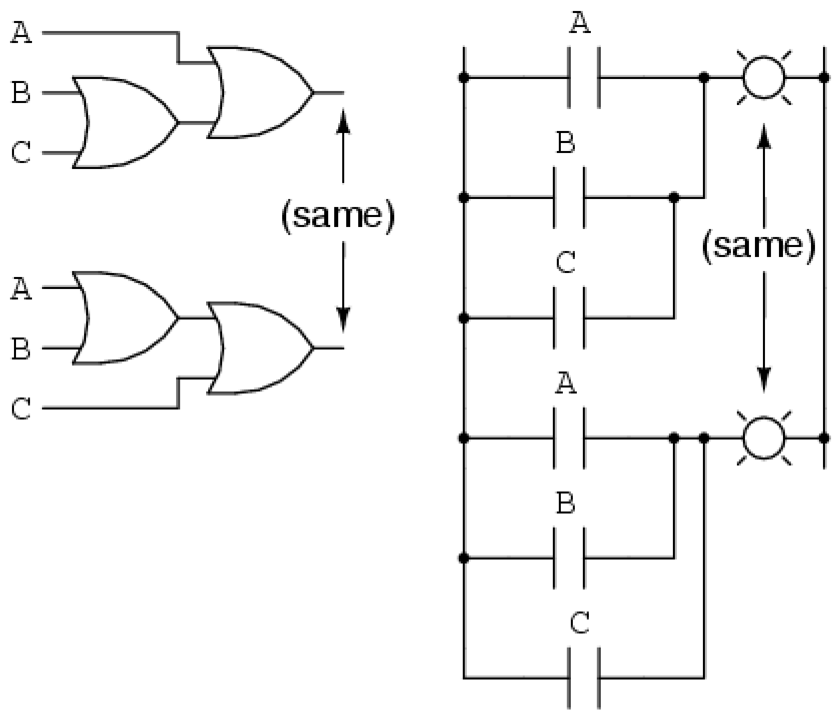
٢- خاصية الضم associative property :

حيث يمكن ضم مجموعات من المتغيرات أثناء الجمع أو الضرب دون التأثير على صحة المتطابقة .

ففى عملية الجمع :

Associative property of addition

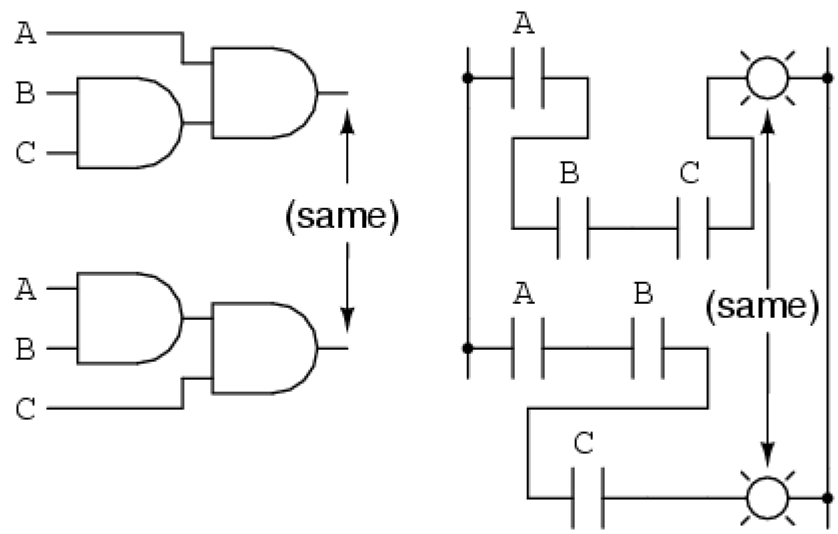
A + (B + C) = (A + B) + C



وفى عملية الضرب :

Associative property of multiplication

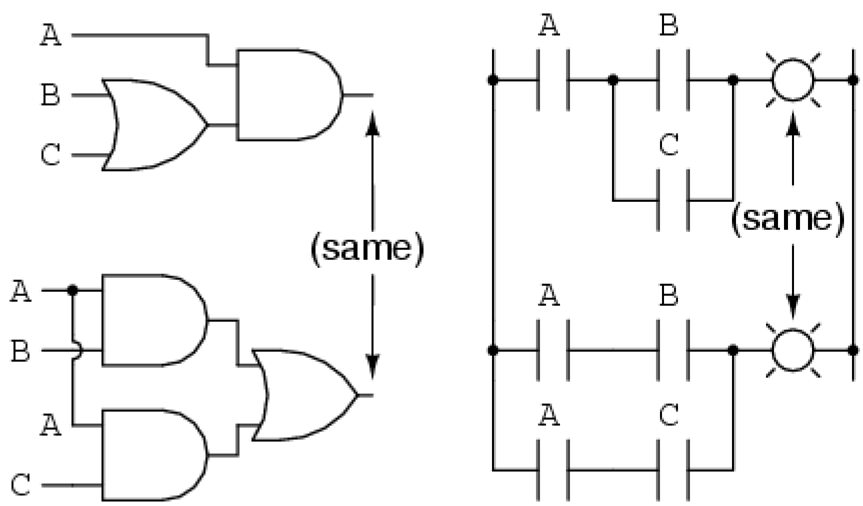
A(BC) = (AB)C



٢- خاصية التوزيع distributive property :

Distributive property

A(B + C) = AB + AC

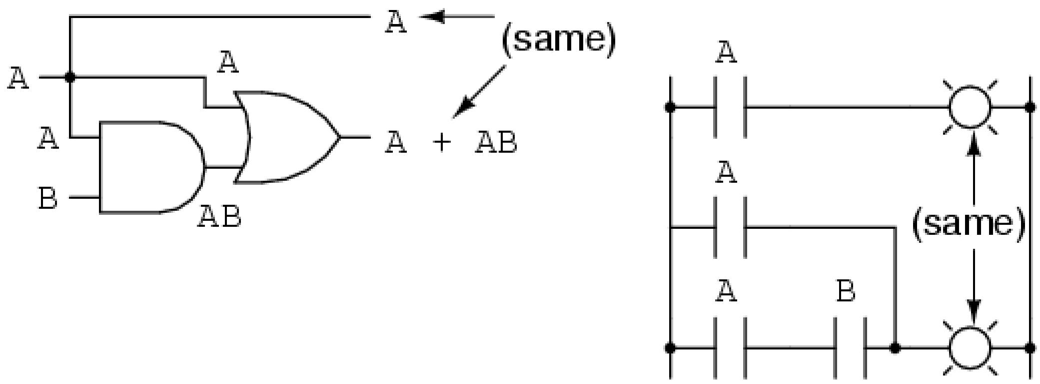


القواعد المنطقية للتبسيط Boolean rules for simplification :

أهم إستخدامات الجبر البولينى هو تبسيط الدارات المنطقية . حيث نحول وظيفة الدارة إلى معادلة منطقية ثم نقوم بتبسيطها ثم نعيد تحويلها لدارة منطقية أقل فى عدد العناصر وابسط فى التنفيذ وتقوم بنفس الوظيفة .

١-

$$A + AB = A$$



ويمكن إثبات هذا التبسيط بواسطة الخواص والمتطابقات :

A + AB

↓ بأخذ A كعامل مشترك

A (1 + B)

↓ بتطبيق المتطابقة B+1=1

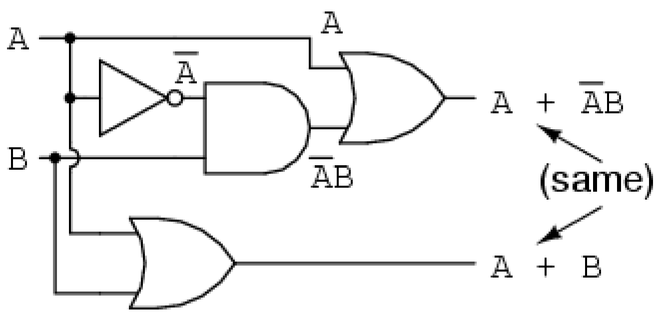
A (1)

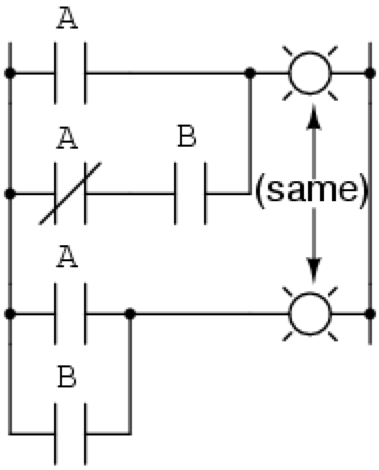
↓ بتطبيق المتطابقة 1A=A

A

٢-

$$A + \overline{A}B = A + B$$





ويمكن إثبات هذا التبسيط بواسطة الخواص والمتطابقات :

$\mathbf{A+\overline{A}\,B}$

↓بتطبيق قاعدة التبسيط السابقة لفك المتغير A (A=A+AB)

$\mathbf{A+ AB + \overline{A}\,B}$

↓ بأخذ B كعامل مشترك من الحدين الثانى والثالث

$\mathbf{A + B (A + \overline{A})}$

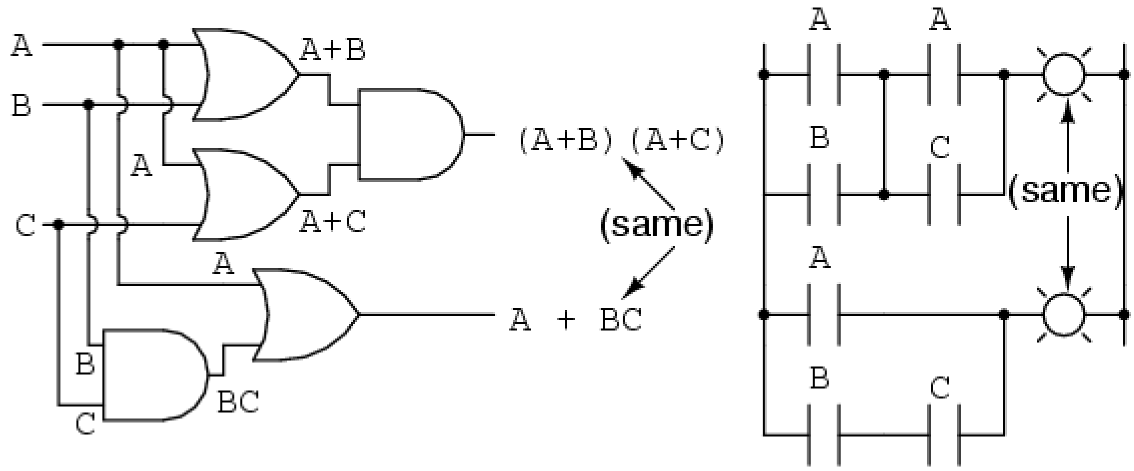
↓بتطبيق المتطابقة $A+\overline{A} = 1$

$\mathbf{A+B (1)}$

↓ بتطبيق المتطابقة 1B=B

$\mathbf{A+B}$

(A + B) (A + C) = A + BC



ويمكن إثبات هذا التبسيط بواسطة الخواص والمتطابقات :

(A+B)(A+C)

↓ بضرب الحدود وفك الأقواس

AA+AC+AB+BC

↓ بتطبيق المتطابقة AA=A

A+AC+AB+BC

↓ بتطبيق القاعدة A+AC=A

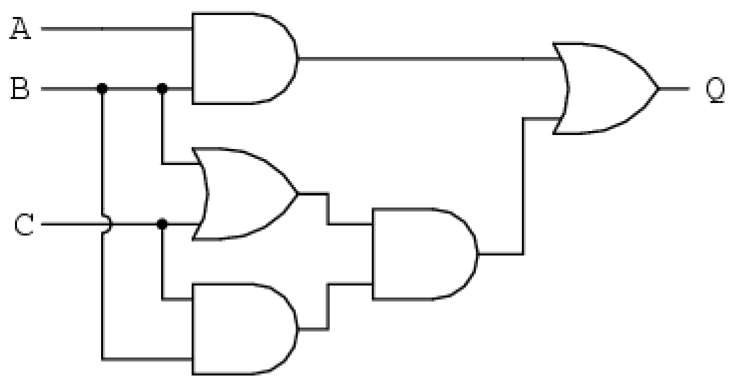
A+AB+BC

↓ بتطبيق القاعدة A+AB=A

A+BC

أمثلة على تبسيط الدارات المنطقية Circuit simplification examples :

لنفترض الدارة التالية بمداخلها A,B,C (التى ربما تكون آتية من حساسات Sensors أو من خرج دارة منطقية أخرى) وخرجها هو Q . والمطلوب تبسيط هذه الدارة لتحتوى على أقل عدد من العناصر.

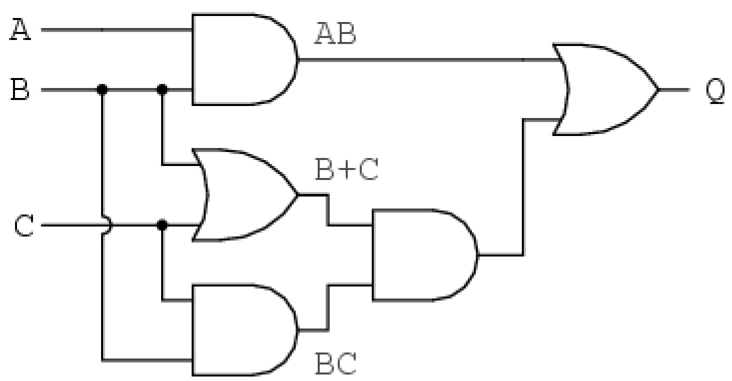


الخطوة الأولى :

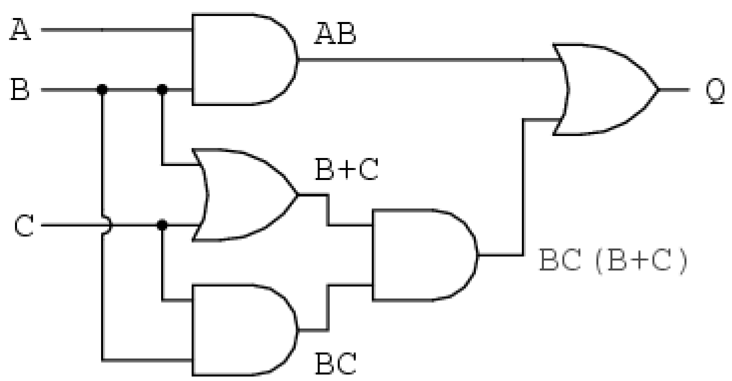
أول ما يجب أن نفعله هو كتابة التعبير المنطقى (البولينى) الذى يعبر عن هذه الدارة ونبدأ بعمل ذلك عن طريق كتابة التعبيرات الجزئية لكل بوابة بداية من أطراف الدخل وبتسلسل حتى نصل للخرج.

تذكر أن بوابات OR هى مكافئات لعملية الجمع المنطقى لدخولها وأن بوابات AND هى مكافئات لعلملية الضرب المنطقى لدخولها .

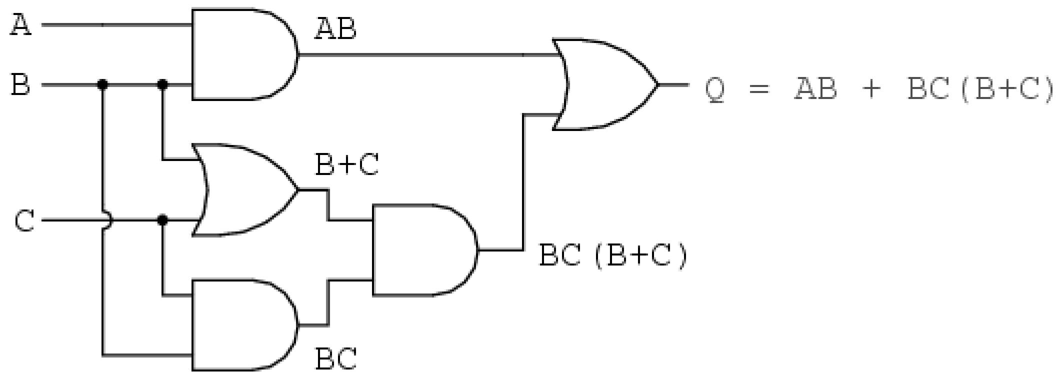
وبكتابة التعبيرات الجزئية للثلاث بوابات الأولى تكون كالآتى :



ثم كتابة التعبير المنطقى للبوابة التالية :



وفى أخر مرحلة نجد أن التعبير المنطقى للخرج هو **Q= AB + BC (B + C)**



الخطوة الثانية :

هى تبسيط تلك المعادلة المنطقية باستخدام الخواص والمتطابقات المنطقية السابق ذكرها :

AB+BC (B+C)

↓ بالتوزيع وفك الأقواس

AB+BBC+BCC

↓ بتطبيق المتطابقة AA=A على الحد الثانى والثالث (حيث A هو رمز عام)

AB+BC+BC

↓ بتطبيق المتطابقة A+A=A على الحد الثانى والثالث

AB+BC

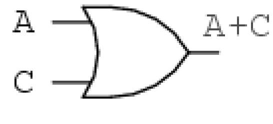
↓ بأخذ B كعامل مشترك

B (A+C)

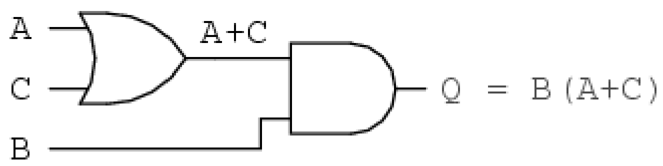
(يمكن التأكد من صحة التعبير الرياضى الأخير بعمل جدول الحقيقة له ومطابقته مع جدول الحقيقة للتعبير الأول وذلك لحالات الدخل الممكنة $2^3 = 8$)

الخطوة الثالثة :

بعد أن وصلنا لأبسط صورة للتعبير المنطقى المعبر عن الدارة تأتى مرحلة إعادة رسم الدارة بعد تبسيطها . ونبدأ برسم الجزء الموجود داخل القوس A+C والذى هو عملية جمع يعبر عنها بالبوابة OR



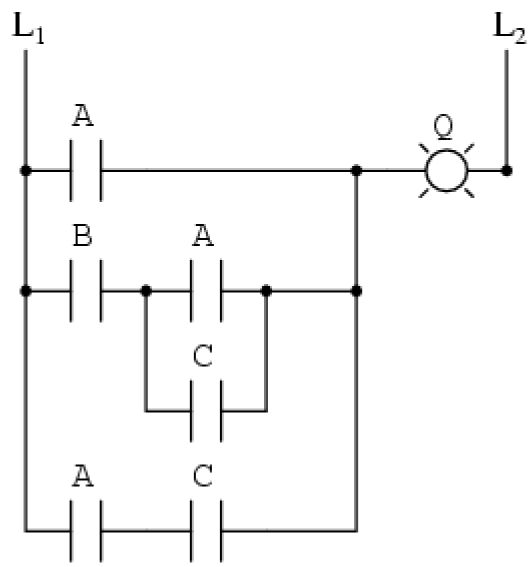
ولضرب هذا الخرج فى دخل جديد B نستخدم بوابة AND



وبالطبع فإن الدارة التى حصلنا عليها هى أبسط بكثير حيث تحوى بوابتين فقط بدلا من خمسة . وهذا التبسيط يزيد من سرعة عمل الدارة (بتقليل زمن التأخير) ويقلل من القدرة المهدرة ويقلل التكلفة والحجم.

هذا بالنسبة لتبسيط الدارات المنطقية المبنية من أشباه الموصلات . أما عن الدارات المنطقية المبناه من الريليهات الكهروميكانيكية فإن هذا التبسيط سيكون أكثر أهمية (لأنها ذات فقد عالى للقدرة وذات زمن تأخير كبير نسبيا بالإضافة إلى قابليتها للعطب) .

ولعل طريقة التمثيل الأبسط لتلك الدارات هى المخططات السلمية Ladder Diagram والتى تستخدم فى برمجة وحدات الـ PLC وفى المثال التالى سنعرف كيفية تطبيق قواعد التبسيط على المخططات السلمية وذلك بفرض الدارة التالية :

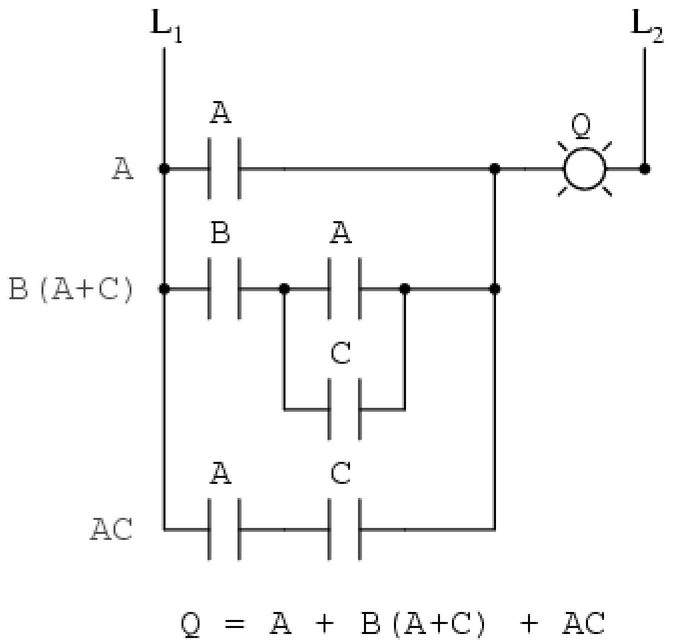


الخطوة الأولى :

وبالمثل فإن اول خطوة يجب القيام بها هى إيجاد التعبير المنطقى لتلك الدارة .

وتذكر أن التوصيل على التوازى فى المخططات السلمية يعنى الجمع بينما التوصيل على التوالى يعنى الضرب .

أبدأ بكتابة التعبير المنطقى لكل فرع (درجة من درجات السلم) بجانبه ثم أجمع كل الفروع المتوازية كما بالشكل التالى :



الخطوة الثانية :

والأن وقد أصبح لدينا التعبير الكلى للمخطط يمكننا تبسيطة باستخدام القواعد المنطقية :

A+B (A+C) +AC

↓ بالتوزيع وفك الأقواس

A+AB+BC+AC

↓ بتطبيق القاعدة A+AB=A

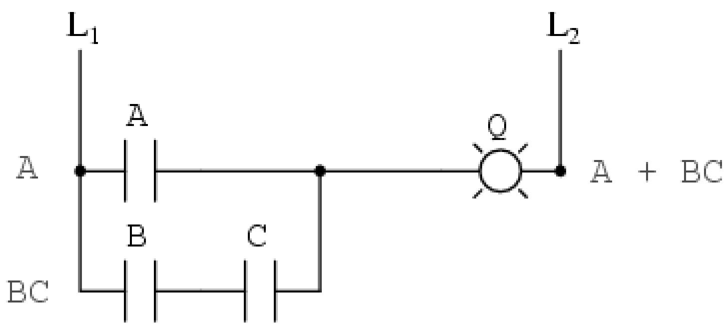
A+BC+AC

↓ بتطبيق القاعدة A+AB=A

A+BC

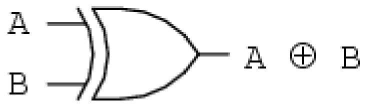
الخطوة الثالثة :

برسم المخطط المعبر عن التبسيط يكون كالآتى :

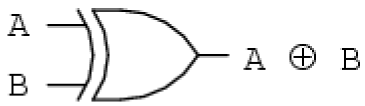


دالة " أو الإستثنائية" The Exclusive-OR function:

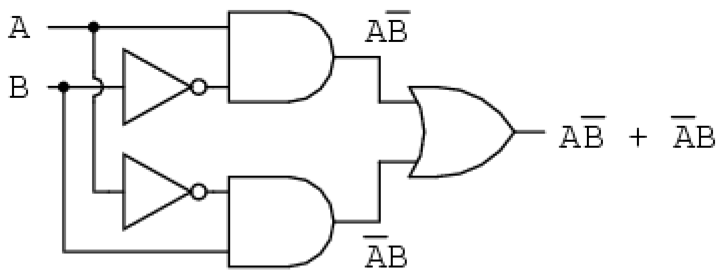
أحد البوابات التى تهمل كثيرا عند الحديث عن البوابات المنطقية هى بوابة " أو الإستثنائية" وعدم شهرتها هو نتيجة عدم تعبيرها عن عملية مشهورة كعملية الضرب التى يعبر عنها ببوابة AND وعملية الجمع التى يعبر عنها بالبوابة OR إلا أن ذلك لم يوقف الناس من تطوير رمز ليعبر عن وظيفة هذه البوابة الجديدة والرمز هو + موضوعه فى دائرة.



ولأن القواعد المنطقية لا تتعامل مع هذا الرمز إلا أننا يمكننا التعبير عن هذه البوابة بفكها بدلالة البوابات المشهورة :



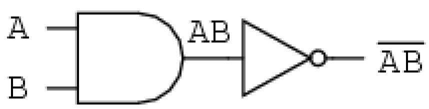
. . . is equivalent to . . .



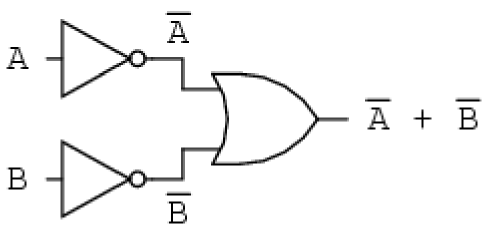
$$\mathbf{A \oplus B = A\overline{B} + \overline{A}B}$$

نظرية ديمورجان DeMorgan's Theorems :

وتقر نظرية ديمورجان بأن الخرج المعكوس لأى بوابة (AND أو OR) يكافىء خرج البوابة الأخرى (OR أو AND) بعد عكس دخولها . أنظر الشكل التالى لفهم النظرية :



. . . is equivalent to . . .



$$\mathbf{\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}}$$

الخط الأفقى الطويل (والذى سماه ديمورجان break) والموجود فوق الحرفين AB يعمل كرمز ضم وهو لا يعنى أن $\overline{A}$ مضروب فى $\overline{B}$ ولكنه يعنى جمعهما.

وهكذا تكون القاعدتين اللتين استنتجهما ديمورجان هما :

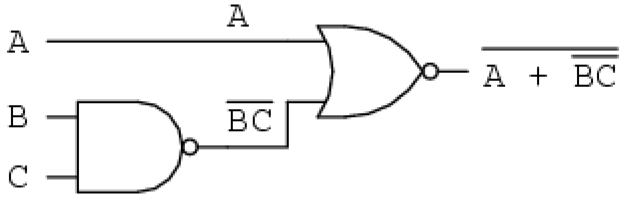
$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$\overline{A+B} = \overline{A}\ \overline{B}$$

لاحظ أنـه: بكسر الخط العلوى (الضامة) تنقلب العملية (ضرب أو جمع) بين المتغيرين.

- عندما توجد عدة طبقات من الخطوط (الضامات) الأفقية الضامة فإن كسرها يتم واحدة بواحدة ويفضل البدأ بالكبيرة منها (العليا).

ولنأخذ على سبيل المثال الدارة التالية والمطلوب تبسيطها :



$$\overline{A+\overline{BC}}$$

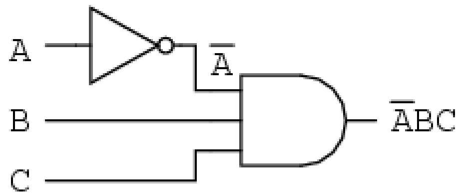
↓ بكسر الضامة العليا (تحويل الجمع لضرب) **أحذر فك ضامتين فى نفس الخطوة**

$$\overline{A}\,\overline{\overline{BC}}$$

$BC=\overline{\overline{BC}}$ ↓

$$\overline{A}BC$$

وبذلك تكون الدارة المبسطة هى :

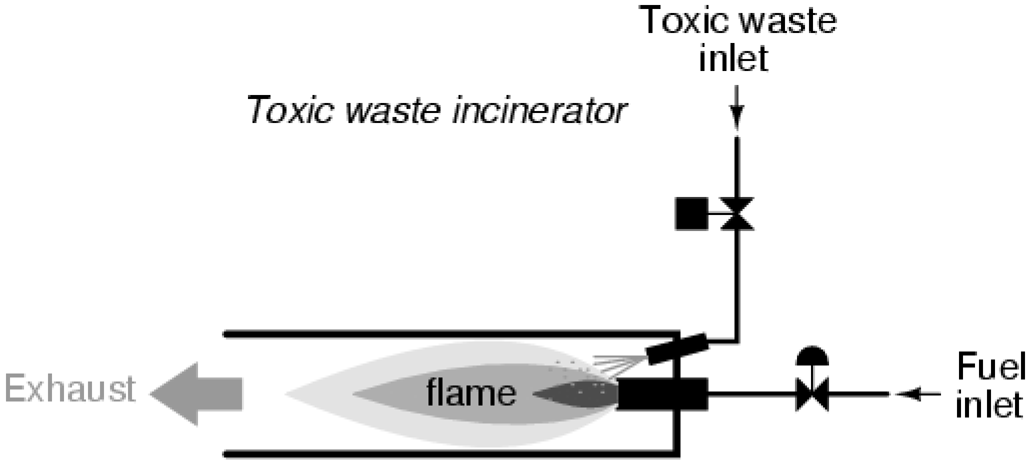


<u>تحويل جداول الحقيقة إلى تعابير منطقية :</u>

<u>Converting truth tables into Boolean expressions:</u>

إن مصمم الدارات المنطقية يبدأ بكتابة جدول الحقيقة الذى يصف وظائف الدارة المراد تصميمها ثم بعد ذلك يقوم بتحويل هذا الجدول إلى دارة تقوم بتلك الوظائف مرورا ببعض الخطوات التى سنأتى على ذكرها فى السياق التالى :

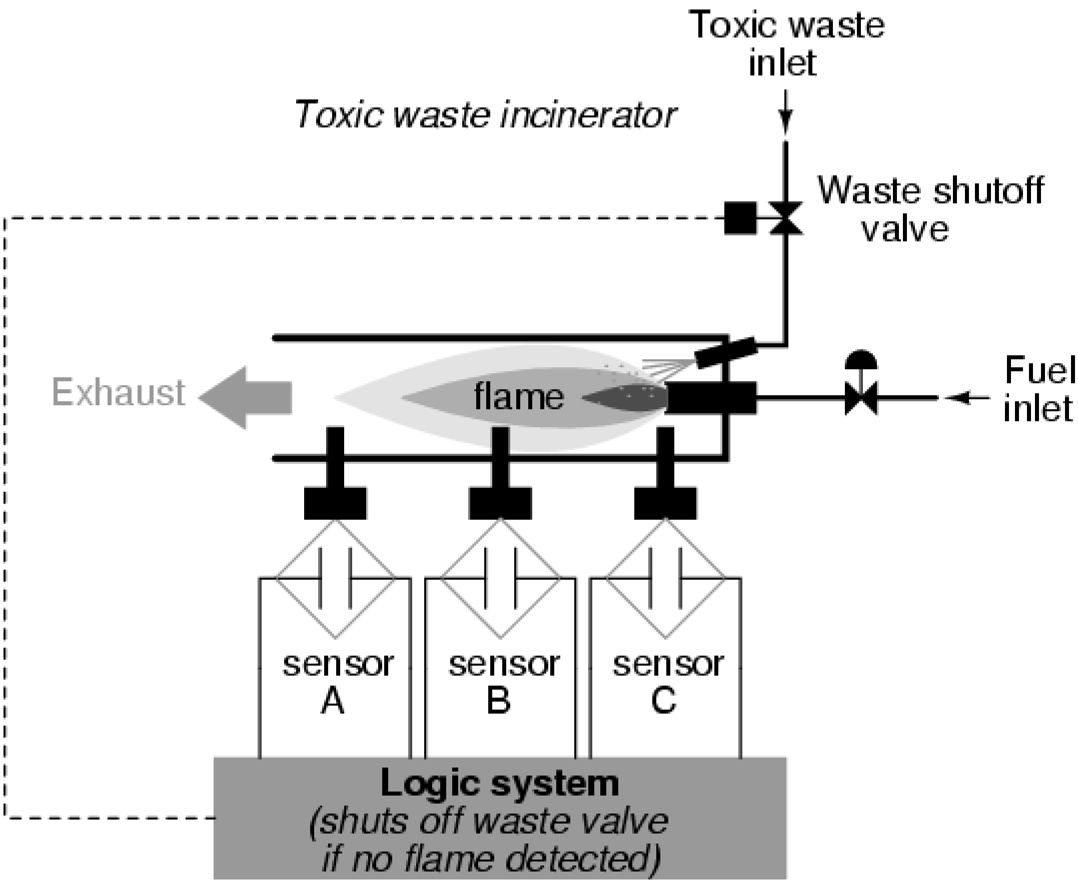
لنفرض مشكلة حقيقية حيث طلب من المصمم تصميم دارة للكشف عن اللهب فى حارقة قمامة ملوثة toxic waste incinerator حيث ستعمل الطاقة الحرارية على تطهير هذه القمامة (التى ربما تكون فضلات طبية مليئة بالبكتريا والفيروسات)



Inlet ➔ مدخل   Exhaust ➔(القمامة بعد تطهيرها) عادم   Fuel ➔ وقود

سيكون من الآمن إدخال القمامة الملوثة فقط إذا كان اللهب مشتعلا حتى يقوم بتطهيرها على الفور . أما لو كان اللهب مطفأ فإن إدخال القمامة يعنى أنه ربما ستمر القمامة الملوثة إلى خارج العملية قبل تطهيرها لتهدد صحة الأفراد فى الخارج . فما نريده من النظام هو الكشف عن اللهب فإن كان موجودا يسمح بالقمامة الملوثة بالدخول لتطهيرها.

وبالعديد من التقنيات يمكن الكشف عن وجود اللهب داخل المحرقة . كالكشف البصرى optical (أكتشاف ضوء اللهب) أو الكشف الحرارى thermal (باكتشاف درجة حرارة اللهب) أو كشف التوصيل الكهربى للجزيئات المتأينة فى طريق اللهب . ولأن لكل طريقة مميزاتها وعيوبها فإنه من وجهة نظر الأمان يكون علينا أستخدام عدة طرق بعدة حساسات Sensors



ومهمتنا الأن هى تصميم دارة تقوم بفتح صمام valve القمامة الملوثة فقط وفقط إذا كان هناك إثبات أكيد بأن اللهب موجود .

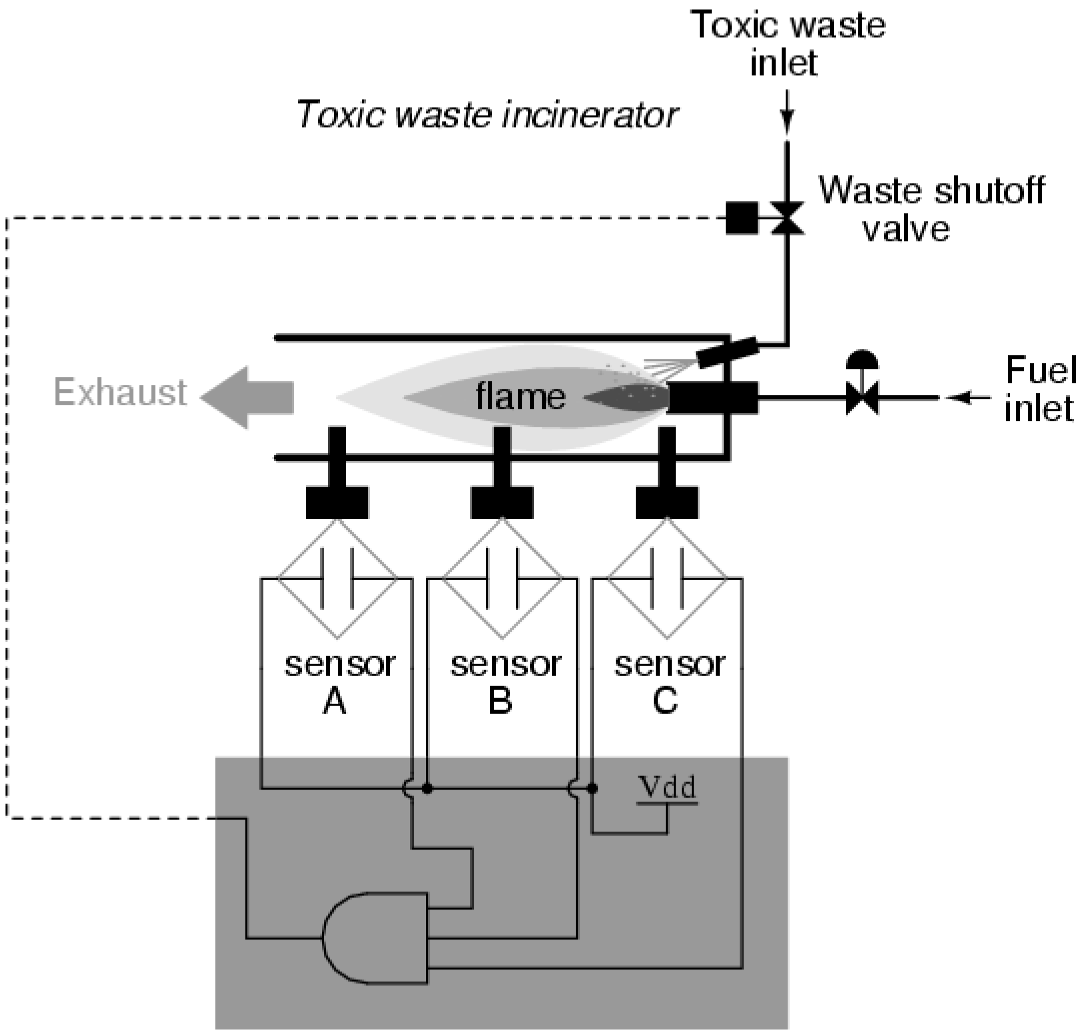
فهل علينا أن نفتح الصمام لمجرد أن أحد الحساسات أشار لوجود لهب ؟ بالتأكيد لا فربما يكون قد عطب هذا الحساس وأعطى إشارة خاطئة . لذلك فمن الآمان يجب أن ننتظر وصول إشارات الحساسات الثلاثة . ويكون جدول حقيقتنا كالآتى :

دخل الحساسات			
A	B	C	الخرج
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

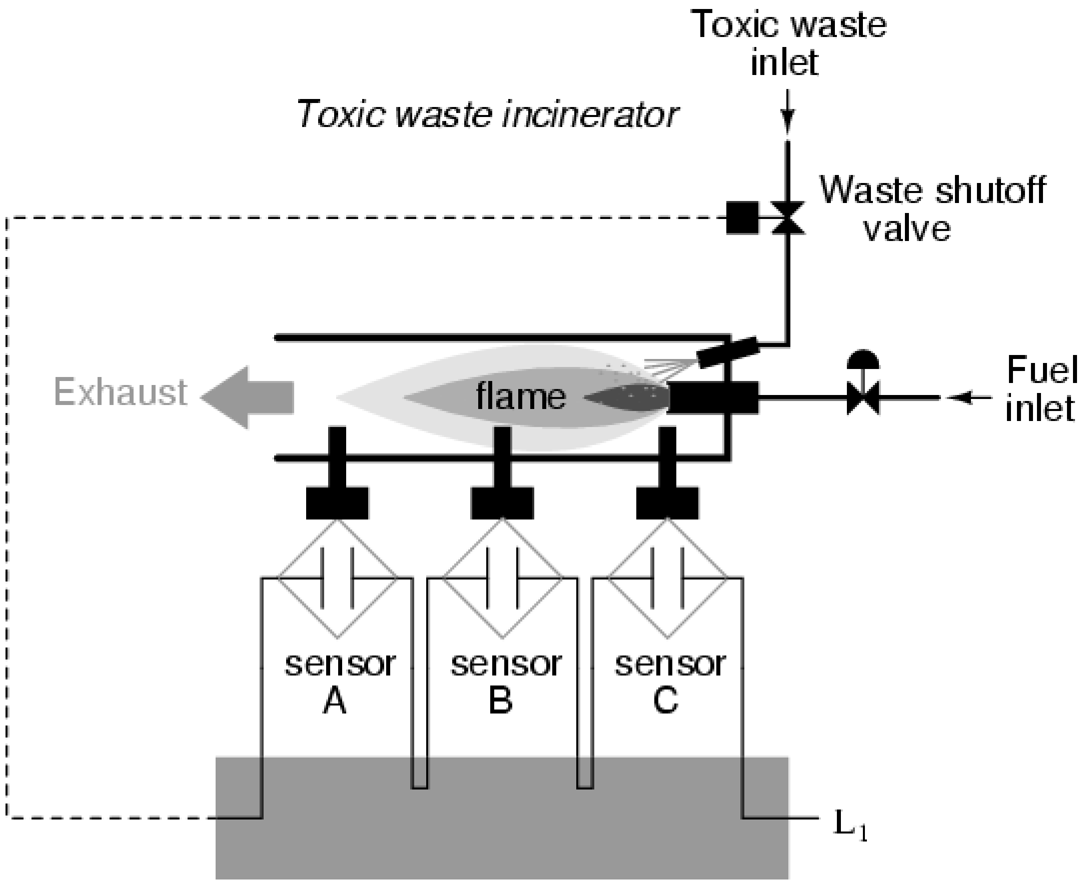
الخرج 0 يعنى أن الصمام مغلق

الخرج 1 يعنى أن يفتح الصمام (ولن يحدث هذا إلا إذا كانت إشارات الحساسات الثلاثة فى الحالة العليا)

ولا يحتاج الأمر لقوة ملاحظة لتحديد أن الدارة التى نحتاجها ما هى إلا بوابة AND فقط .



ولو كنا نستخدم دارة تعتمد على نظم الريليهات (يقوم الحساس بغلق تلامس) فيمكننا حينئذ الإستغناء عن بوابة الـAND وتوصيل تلامسات الحساسات على التوالى حيث ستسير القدرة خلال تلامسات الحساسات عند غلقها للتحكم فى الصمام :



وبالطبع فإن الفكرتين السابقتين رغم توفيرهما لعامل الأمان إلا أنهما حساستين لعطل أحد الحساسات . وربما هذا العطل (فى أحد الحساسات) سيوقف النظام بأكمله فيعطل التخلص من الفضلات الملوثة مما سيلقى بظلاله على الإنتاج. وسيكون من الجيد وجود نظام منطقى يمكنه تفادى هذا العطل دون أن يتوقف النظام . وربما يكون علينا أن نتنازل عن بعض الأمان لتجنب شل النظام وذلك بالإكتفاء بقرار حساسين من الثلاثة حساسات . ويكون جدول الحقيقة حينها كالآتى :

دخل الحساسات			
A	**B**	**C**	**الخرج**
0	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**1**

حينما يكون دخلين على الأقل من دخل الحساسات الثلاثة فى وضع منطقى عالى (1)

يفتح صمام إمرار القمامة الملوثة (الخرج = 1)

ولإستنتاج الدارة المنطقية المعبرة عن جدول الحقيقة هذا يجب أن نكون التعبير المنطقى المعبر عنه وذلك بطريقة تسمى **"مجموع المضاريب" Sum-Of-Products . ومجموع المضاريب هذا** يعنى أنه سيكون لدينا تعبير منطقى عبارة عن مجموع عدد من الحدود . كل حد من هذه الحدود عبارة عن مضروب متغيرين أو أكثر . فمثلا التعبير **(ABC + BC + DF)** عبارة عن مجموع للمضاريب ABC , BC, DF.

والحصول على مجموع المضاريب من جدول الحقيقة أمر سهل . فما عليك سوى أن تمر على الصفوف التى يكون الخرج فيها مساويا (1) وتكتب التعبير المنطقى المعبر عن مضاريب الدخول . فمثلا : فى الجدول السابق وفى الصف المظلل نجد أن الخرج = (1) والدخول هى A=1 و B=0 و C=1 ولذلك فإن التعبير المنطقى لمضروب الدخول لهذا الصف هو $A\bar{B}C$ (لاحظ الخط العلوى على $\bar{B}$ وذلك لأن قيمة هذا الدخل = 0) .

والأن أنظر لبقية مضاريب الصفوف التى خرجها = 1 والموضحة على الجدول التالى :

دخل الحساسات				
A	**B**	**C**	**الخرج**	
0	**0**	**0**	**0**	
0	**0**	**1**	**0**	
0	**1**	**0**	**0**	
0	**1**	**1**	**1**	$\bar{A}BC$
1	**0**	**0**	**0**	
1	**0**	**1**	**1**	$A\bar{B}C$
1	**1**	**0**	**1**	$AB\bar{C}$
1	**1**	**1**	**1**	ABC

من الجدول المقابل نستنتج التعبير المنطقى للخرج من مجموع المضاريب:

$$\text{Output} = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$$

وبالطبع يمكننا رسم الدارة المعبرة عن هذا التعبير المنطقى . ولكن مهلا ..

يمكننا تبسيط هذا التعبير قبلا بواسطة القواعد المنطقية :

بداية

$$\bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$$

↓ بأخذ BC كعامل مشترك من الحدين الأول (يسارا) والرابع

$$BC(\bar{A}+A) + A\bar{B}C + AB\bar{C}$$

$\bar{A}+A=1$ ↓

$$BC(1) + A\bar{B}C + AB\bar{C}$$

$BC(1)=BC$ ↓

$$BC + A\bar{B}C + AB\bar{C}$$

↓ بأخذ B كعامل مشترك من الحدين الأول والثالث

$$B(C+A\bar{C}) + A\bar{B}C$$

←

$(C+A\bar{C})=A+C$↓

$$B(A+C) + A\bar{B}C$$

↓ بالتوزيع وفك الأقواس

$$BA+BC+A\bar{B}C$$

↓بأخذ A كعامل مشترك من الحدين الأول والثالث

$$A(B+\bar{B}C)+BC$$

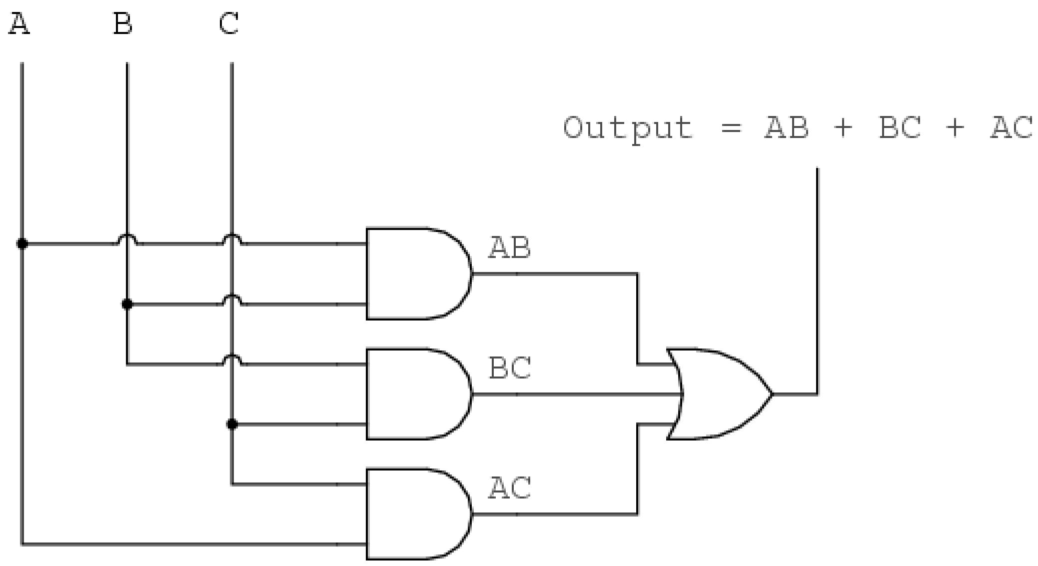
$(B+\bar{B}C)=B+C$↓

$$A(B+C)+BC$$

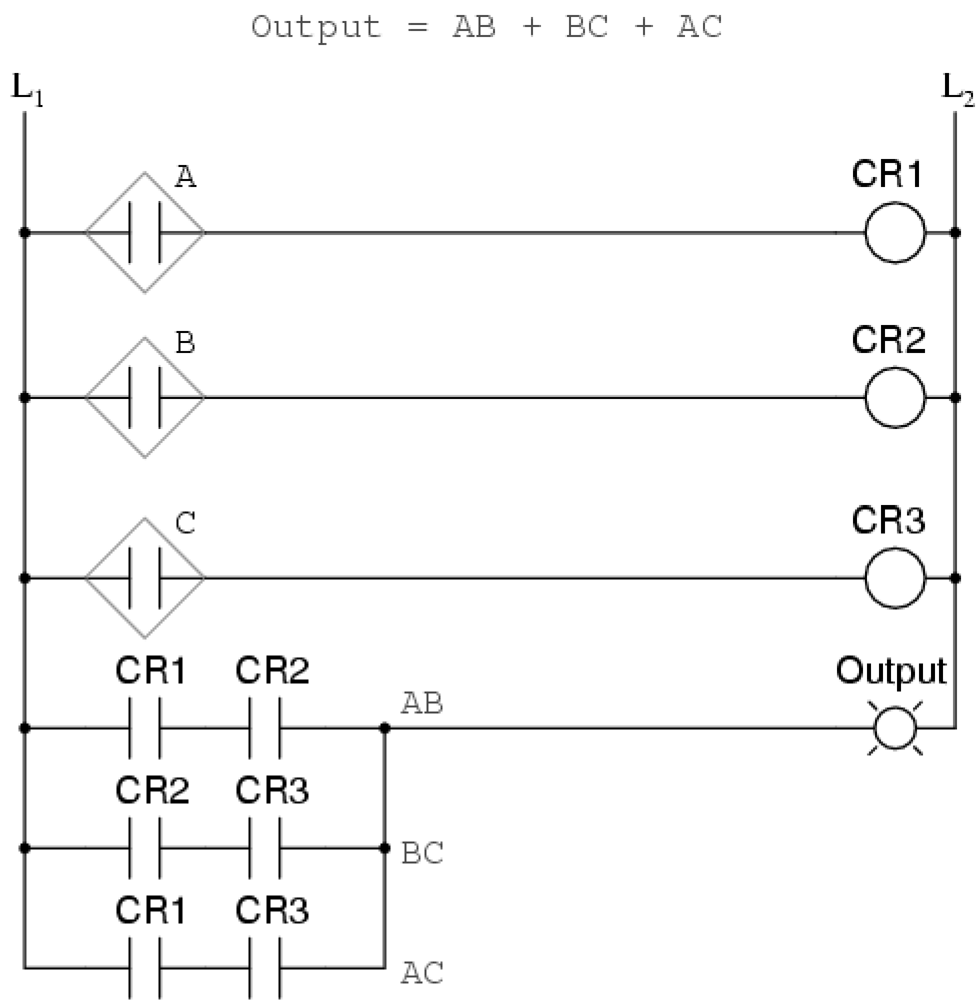
↓ بالتوزيع وفك الأقواس

$$AB+AC+BC$$

وبناء على التعبير المنطقى المبسط AB+AC + BC ستصبح دارتنا كالتالى :



والمخطط السلمى :



وأي من هاتين الدارتين سيعمل بكفاءة فى إدارة المحرقة .

ولتوسيع وظائف هذه الدارة يمكننا إضافة دارة منطقية تقوم بالكشف عن وجود عطل بأحد الحساسات وذلك بمقارنة مخارج تلك الحساسات وإظهار ما إذا كان هناك حساس مختلف عن الباقين . فلو كانت الحساسات الثلاثة عاملة بكفاءة فإنها ستتفق فى تسجيلها لوجود اللهب (111) وعدم وجوده (000) . وأى مزيج آخر من تلك الحالات المنطقية كـ (**001** أو **010** أو **011** أو **100** أو **101** أو **110**) فيعنى أن هناك مشكلة فى أحد الحساسات . وإذا أستطعنا أن نصمم دارة تقوم بالكشف عن هذا العطل وتشغيل جهاز إنذار أو إغلاق الفرن سيكون هذا أكثر أمانا. وأول خطوة سيكون علينا القيام بها هى كتابة جدول الحقيقة الذى يعبر عن عدم إتفاق الحساسات وكتابة التعبير المنطقى من مجموع المضاريب.

دخل الحساسات					
A	**B**	**C**	**الخرج**	**عدم الإتفاق**	
0	**0**	**0**	**0**	**0**	
0	**0**	**1**	**0**	**1**	$\overline{A}\,\overline{B}C$
0	**1**	**0**	**0**	**1**	$\overline{A}B\overline{C}$
0	**1**	**1**	**1**	**1**	$\overline{A}BC$
1	**0**	**0**	**0**	**1**	$A\overline{B}\,\overline{C}$
1	**0**	**1**	**1**	**1**	$A\overline{B}C$
1	**1**	**0**	**1**	**1**	$AB\overline{C}$
1	**1**	**1**	**1**	**0**	

تعبير مجاميع المضاريب لعدم الإتفاق هو :

$$\overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

وأحد الطرق الأخرى (الأسهل فى حالتنا) لإيجاد مجاميع المضاريب Sum-Of-Products تكون بإيجاد مضاريب المجاميع Product-Of-Sums للصفوف التى خرجها المنطقى منخفض (0) . ولكن فى هذه الحالة ستختلف بعض القواعد :

ما عليك سوى أن تمر على الصفوف التى يكون الخرج فيها مساويا (0) وتكتب التعبير المنطقى المعبر عن مجموع نفىالدخول. فمثلا : فى الجدول السابق وفى الصف الأول نجد أن الخرج = (0) والدخول هى A=0 و B=0 و C=0 ولذلك فإن التعبير المنطقى لمجموع نفى الدخول لهذا الصف هوA+B+C .

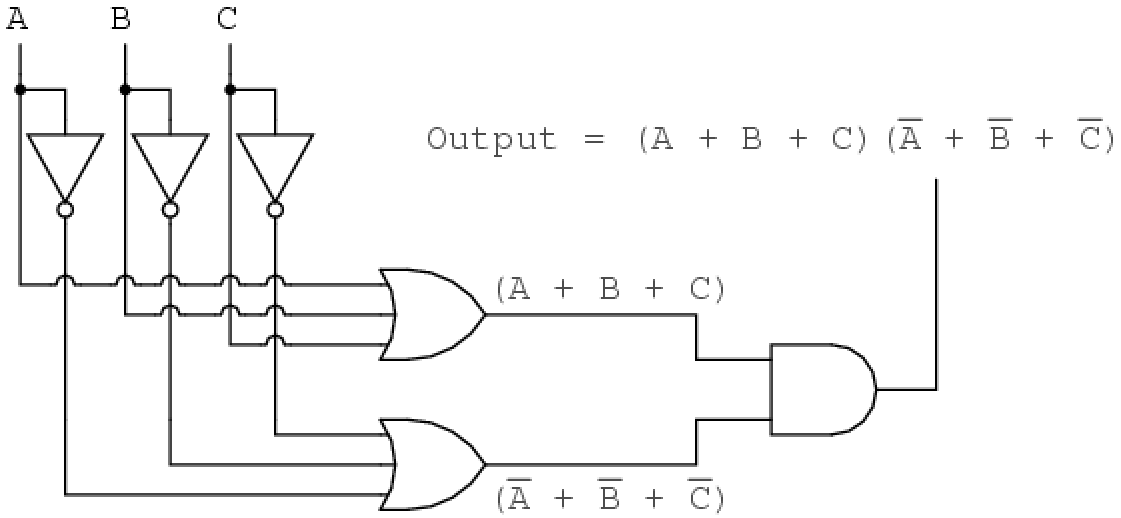
والأن أنظر لبقية مجموع الصفوف التى خرجها = 0 والموضحة على الجدول التالى :

دخل الحساسات					
A	**B**	**C**	**الخرج**	**عدم الإتفاق**	
0	**0**	**0**	**0**	**0**	$A+B+C$
0	**0**	**1**	**0**	**1**	
0	**1**	**0**	**0**	**1**	
0	**1**	**1**	**1**	**1**	
1	**0**	**0**	**0**	**1**	
1	**0**	**1**	**1**	**1**	
1	**1**	**0**	**1**	**1**	
1	**1**	**1**	**1**	**0**	$\overline{A}+\overline{B}+C$

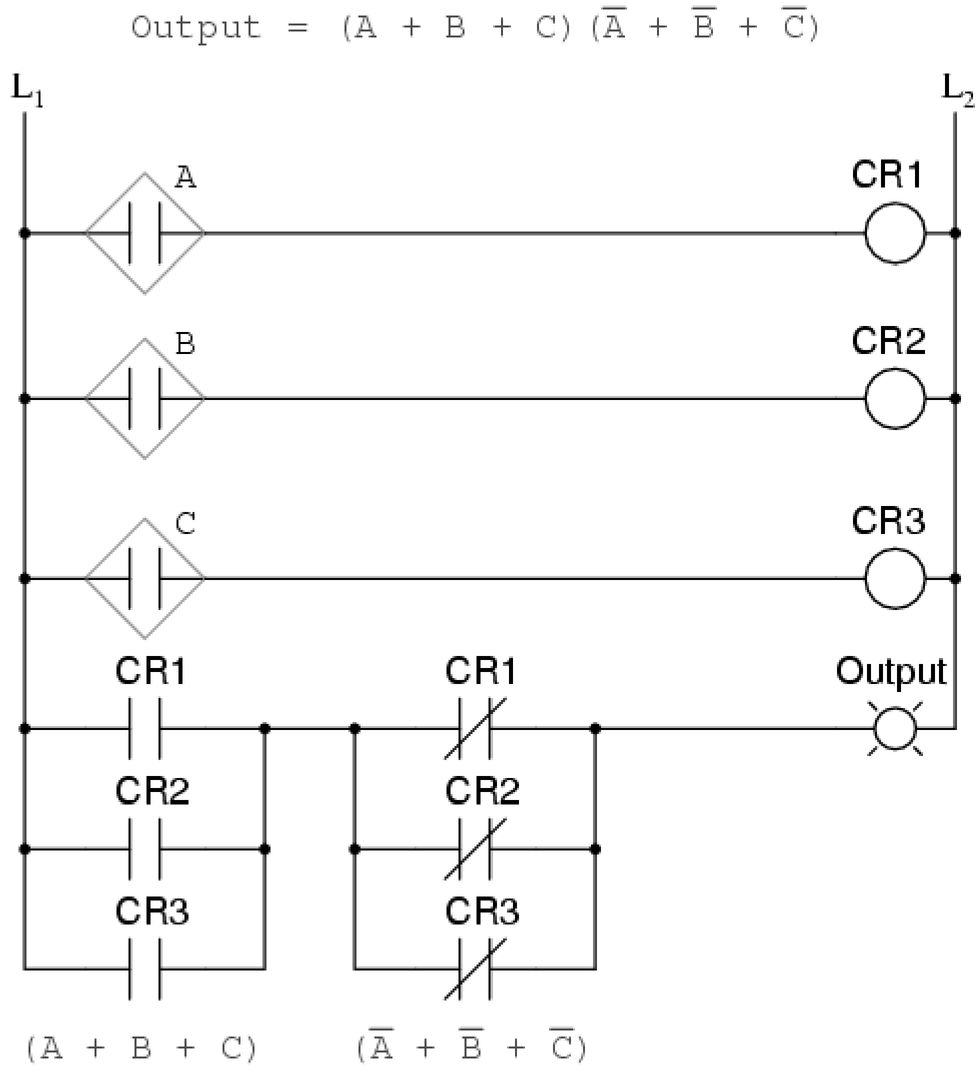
ويكون حينها مضروب مجاميع الدخول هو التعبير المنطقى :

$$(A + B + C)(\overline{A} + \overline{B} + C)$$

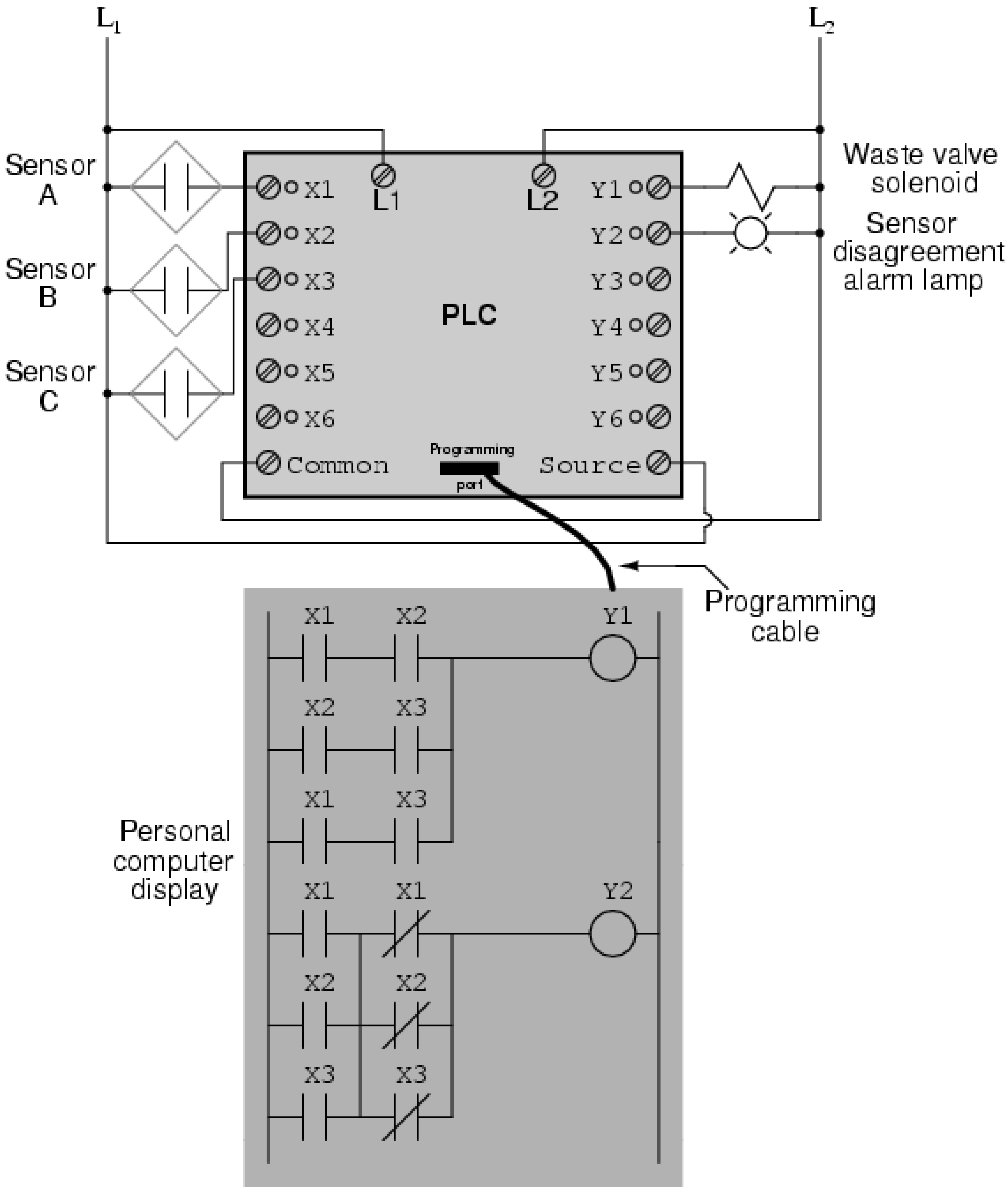
ويمكن فك الأقواس للحصول على مجموع المضاريب . ولكنى سأستمر برسم الدارة من خلال التعبير السابق



ويكون المخطط السلمى :



ولتطبيق وظائف هذه الدارات عمليا من خلال وحدة الـPLC يوصل جهاز الحاسب الموجود بـه برنـامج الـLadder الذى يصف الوظيفة المنطقية المرادة بوحدة الـPLC من خلال منفذ البرمجة Programming Port موجود فى الـ PLC.



ملخص القواعد المنطقية :

$0 + 0 = 0$

$0 + 1 = 1$

$1 + 0 = 1$

$1 + 1 = 1$

$0 \times 0 = 0$

$1 \times 0 = 0$

$0 \times 1 = 0$

$1 \times 1 = 1$

$A+1=1$

$A+0=A$

$A+A=A$

$A+\overline{A}=1$

$0A=0$

$1A=A$

$AA=A$

$A\overline{A}=0$

$\overline{\overline{A}}=A$

$A+B=B+A$

$AB=BA$

$A+(B+C)=(A+B)+C$

$A(BC)=(AB)C$

$A(B+C)=AB+AC$

$A+AB=A$

$A+\overline{A}B=A+B$

$(A+B)(A+C)=A+BC$

Demorgan laws:

$\overline{AB} = \overline{A}+\overline{B}$

$\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}$

المرجع :

http://www.ibiblio.org/obp/electricCircuits/Digital/DIGI_7.html